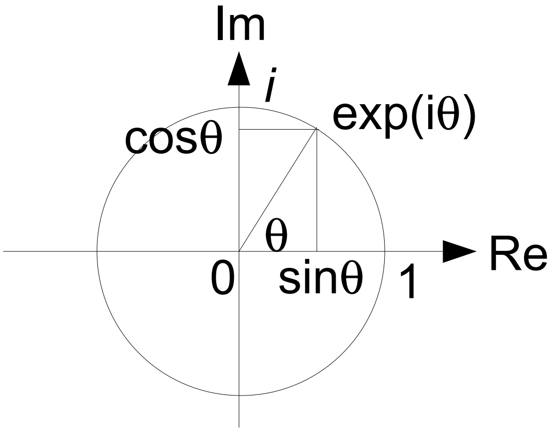
複素関数の三角関数の加法定理、倍角定理への応用



複素関数 $\exp(i\theta)$ は上図のように、複素平面で書けるから、

$$\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$$

したがって、

$$\sin\theta=\frac{\exp(i\theta)-\exp(-i\theta)}{2i},$$

$$\cos\theta=\frac{\exp(i\theta)+\exp(-i\theta)}{2}$$

これを使って、数学的に三角関数の加法定理を導出しておこう。

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta&=\frac{1}{4}\left\{e^{i\alpha}e^{i\beta}+e^{i\alpha}e^{-i\beta}+e^{-i\alpha}e^{i\beta}+e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right\}\\
&=\frac{1}{4}\left\{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta&=-\frac{1}{4}\left\{e^{i\alpha}e^{i\beta}-e^{i\alpha}e^{-i\beta}-e^{-i\alpha}e^{i\beta}+e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right\}\\
&=-\frac{1}{4}\left\{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}\right\}\\
&=-\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta&=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left\{e^{i\alpha}e^{i\beta}+e^{i\alpha}e^{-i\beta}-e^{-i\alpha}e^{i\beta}-e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right\}\\
&=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left\{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\sin\beta&=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right)
\end{aligned}$$

加法定理は、上の関係式の加減により簡単に得られる。

倍角定理も上の関係式から簡単に得られるが、一応やってみる。

$$\sin^2\theta = \frac{\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^2}{(2i)^2} = -\frac{1}{4}\left\{e^{i(2\theta)} - 2 + e^{-i(2\theta)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{e^{i(2\theta)} + e^{-i(2\theta)} - 2\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\cos 2\theta - 1\right\} = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^2}{2^2} = \frac{1}{4}\left\{e^{i(2\theta)} + 2 + e^{-i(2\theta)}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{e^{i(2\theta)} + e^{-i(2\theta)} + 2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos 2\theta + 1\right\} = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

半角定理もこれから、直ちに得ることができる。