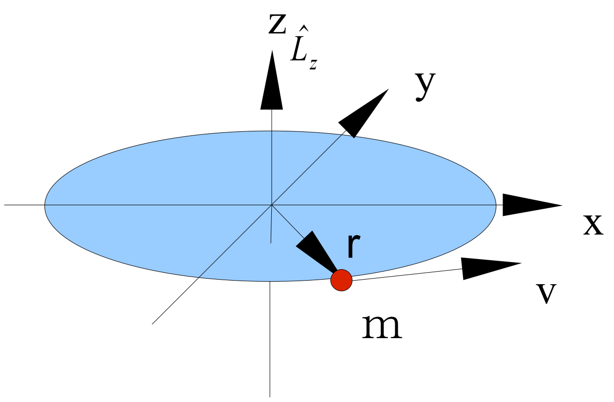
回転する物体の運動



X-Y 平面の上を円運動する物体があるときの運動を考える。これを 3 次元に拡張すれば、原子核から電荷間の引力をうける運動に拡張できる。

直線系と回転系の対応関係は、

直線系	回転系
質量(m)	慣性モーメント($I = mr^2$)
速さ(v)	角速度 ($\omega = v/r$)
運動量 ($\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$)	角運動量 ($\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$)
運動エネルギー $\left(\boldsymbol{K} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2\mathrm{m}}\right)$	回転運動エネルギー $\left(\boldsymbol{K} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2\mathrm{I}}\right)$

のようになっている。

v と ω、m と I の対応関係が作れることに気づくとよい。ただし、これが同じであるわけではない。物理方程式との対応があるだけだ。

たとえば、慣性モーメント I は m ではなくて mr^2 であるし、ω は v そのものではなくて v/r である。したがって角運動量は、 $\boldsymbol{L} = mr^2\omega = mvr$ と書くことができる。

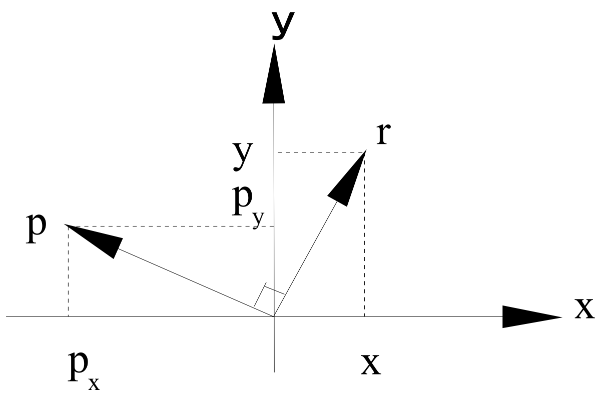
正しくは、運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ を持つ場合、その粒子の角運動量は

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ と定義される。

補足

ここで、 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{c}\sin\theta$ で定義されベクトル積(外積)とよばれる。ここで、 $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のつくる平面に垂直な単位ベクトルで右手系の規則で与えられる。つまり右手の 4 本の指を $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ の向きに曲げたとき、親指がさす方向が $\boldsymbol{c}$ である。

したがって、上図の場合では運動量は Z 方向に与えられることがわかる。これを $\hat{L}_z$ と書く。



この図から、

$$\hat{L}_z = x\,p_y - y\,p_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{1}$$

ここで、

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{2}$$

の関係を用いた。

さて、x 軸から質点(物体)までの回転角を ϕ とすれば、

$$x = \cos\phi$$

$$y = \sin\phi \tag{3}$$

f(x,y)=f(ϕ)を x,y で微分することを考える。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \phi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(-y) + \frac{\partial f}{\partial y}x \\ &= x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\end{aligned} \tag{4}$$

であることがわかる。

つまり、

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \tag{5}$$

結局、(1)式と(5)式から

$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}$ である。 (6)

回転する物体場合の波動関数は、

$\psi = A\exp(i\,m\,\phi)$ からはじめる。 (7)

円周上に運動している場合、円周にそって波が生じていると考えられる。波が干渉によって消えてしまわないためには、一周してもとの波につながる必要がある。一周は角度にして 2π だから

$$A\,e^{im(\phi+2\pi)} = A\,e^{im\phi}\,e^{2\mathrm{m}(i\pi)} = A\,e^{im\phi} \tag{8}$$

なのだから、

$$e^{2m(i\pi)}=e^{(i\phi)(2m)}=-1^{2m}=1 \tag{9}$$

でなければいけない。だから、 $m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ が波が消えないための条件になる。
直線運動のシュレーディンガー方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=E\psi \quad \text{だった。} \tag{10}$$

これを角度に対応ざると、

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\psi=E\psi \tag{11}$$

これに、(7)式を代入すると

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}=-m^2\phi \tag{12}$$

を使って、

$$E=\frac{\hbar^2}{2I}m^2 \qquad\qquad m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{13}$$

が得られる。
角運動量の固有値は、

$$\hat{L}_z\psi=l_z\psi \tag{14}$$

に代入して、

$$\hat{L}_z\psi=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\psi=\hbar m\psi \tag{15}$$

つまり、

$$l_z=m\hbar \qquad\qquad m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{16}$$

ちなみに、規格化をおこなって、(7)式の A を決めると、

$$\int_0^{2\pi} A\exp(-im\phi)A\exp(im\phi)d\phi=1$$

$$A^2\int_0^{2\pi} 1\,d\phi=A^2\cdot 2\pi=1$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

であることがわかる。